

Dev n°7

Ref : Jean Etienne Rombaldi

"Mathématiques par l'agrégation :
Algèbre et géométrie" p145 + p650

Chp : Groupes linéaire

+ Jacquet-Malo p 47-48

Titre : Burnside

Le but de ce jour va être de démontrer le thm suivant:

Thm (Burnside):Soit $G < GL_n(\mathbb{C})$. $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $A^k = Id$, $\forall A \in G$. (exposant finie)
Alors, G est fini.

Pour ce faire nous avons besoin d'un lemme intermédiaire.

Lemme:Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ t.q. $\text{Tr}(A^k) = 0$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$ ssi A est nilpotente.

Commençons par démontrer le lemme intermédiaire.

Démo : Lemme) $\Leftarrow$ A nilpotente.Donc, $\exists P \in GL_n(\mathbb{C})$ une matrice de passage pour passer de A à sa décomposition de Jordan qu'on note J . $A = PJP^{-1}$.On sait que $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(PJP^{-1}) = \text{Tr}(J) = 0$ * car $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ Donc $\text{Tr}(A^k) = \text{Tr}(J^k) = 0$. $\Rightarrow$ Supposons que $A \in M_n(\mathbb{C})$ t.q. $\text{Tr}(A^k) = 0$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$.
Le polynôme caractéristique de A est scindé sur $\mathbb{C}$. * $\mathbb{C}$ algébriquement closRaisonnons par l'absurde : s.g. A non nilpotente.Donc, A admet des valeurs propres non-nulles noté : $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ avec $r \geq 1$,
et $n_1, \dots, n_r$ leur multiplicité respectives.On a, $\forall k \geq 1$,

$$\begin{aligned} \text{Tr}(A^k) &= \text{Tr}(P T^k P^{-1}) \\ &= \text{Tr}(T^k) \\ &= n_1 \lambda_1^k + \dots + n_r \lambda_r^k = 0. \end{aligned}$$

En écrivant ces relations pour $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$, on obtient que $(n_1, \dots, n_r)$ est sol. du système :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_r \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_r^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \lambda_1^r & \lambda_2^r & \dots & \lambda_r^r \end{bmatrix}}_{D(\lambda_1, \dots, \lambda_r)} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{bmatrix}}_{\substack{\in \mathbb{C}^r}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

On cherche à calculer le déterminant de $D(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$.

$$|D(\lambda_1, \dots, \lambda_r)| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{vmatrix} \lambda_1 \dots \lambda_r$$

$$\begin{aligned}
 |D(\lambda_1, \dots, \lambda_r)| &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_r \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{r-1} & \lambda_2^{r-1} & \dots & \lambda_r^{r-1} \end{vmatrix} \lambda_1 \dots \lambda_r \\
 &= V(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \lambda_1 \dots \lambda_r \\
 &= \underbrace{\prod_{1 \leq i < j \leq r} (\lambda_j - \lambda_i)}_{\substack{\text{Vandermonde} \\ \neq 0 \text{ car les } \lambda_i \neq \lambda_j \text{ pour } i \neq j}} \times \underbrace{\lambda_1 \dots \lambda_r}_{\neq 0 \text{ par h. sur les } \lambda_i} \neq 0
 \end{aligned}$$

Donc, on a ici un système de Cramer et donc $\exists!$ sol au système qui est $n_i := \frac{\det(A_i)}{\det(A)} = 0, \forall i \in [1, r]$.

Donc $(n_1, \dots, n_r) = 0$. $\sum$

On a ici une contradiction comme on supposait que les $n_i \geq 1$.

Donc, A est nilpotente $\square$

Passons à la démonstration du Thm.

Démo: (Thm)

Soit $G < GL_n(\mathbb{C})$ avec $(\Pi_i)_{1 \leq i \leq m} \in G^m$ une base de $\text{Vect}(G)$ et $f: G \rightarrow \mathbb{C}^m, A \mapsto (\text{Tr}(A\Pi_i))_{1 \leq i \leq m}$.

• Montrons que si $f(A) = f(B)$ alors $AB^{-1} - I_n$ est nilpotente:

Posons $D = AB^{-1}$.

Par linéarité de la trace, on a $\text{Tr}(A\Pi) = \text{Tr}(B\Pi), \forall \Pi \in \text{Vect}(G)$ et aussi $\forall \Pi \in G$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned}
 \text{Tr}(D^k) &= \text{Tr}(AB^{-1} \underbrace{D^{k-1}}_{\in G}) \\
 &= \text{Tr}(BB^{-1} D^{k-1}) \\
 &= \text{Tr}(D^{k-1}) \\
 &\vdots \\
 &= \text{Tr}(D) \\
 &= \text{Tr}(AB^{-1}) \\
 &= \text{Tr}(BB^{-1}) \\
 &= \text{Tr}(I_n) = n.
 \end{aligned}$$

Ensuite, $\forall k \in \mathbb{N}^*,$

$$\begin{aligned}
 \text{Tr}(D - I_n)^k &\stackrel{\text{binôme Newton}}{=} \text{Tr}\left(\sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^j D^{k-j}\right) \\
 &= \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^j \text{Tr}(D^{k-j}) \\
 &= n \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^j \\
 &= n(1-1)^k = 0
 \end{aligned}$$

Donc, $AB^{-1} - I_n$ est nilpotente (d'après le lemme)

• M.q. les éléments de G sont diagonalisables:

Soit G ss-g de $GL_n(\mathbb{C})$ d'exposant fini N .

$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \lambda^N = 1 \implies \lambda \in \{1, \dots, \lambda^N = 1\}$

- M.g. les éléments de G sont diagonalisables:
 Soit G ss-g de $GL_n(\mathbb{C})$ d'exposant fini N .
 $\forall A \in G$ matrice est annulée par $X^N - 1$ scindée à racines simples.
 Donc toute matrice de G est diagonalisable.
- Montrons maintenant que f est injective:
 Soit $A, B \in G$, t.q. $f(A) = f(B)$ et $D = AB^{-1} \in G$ donc diagonalisable.
 Donc, $D - I_n$ est diagonalisable et nilpotente $\Rightarrow$ nulle.
 Donc $D = I_n$.
 Donc $A = B$.
 Donc, f est injective.
- Conclusion:
 Posons $X = \{ \text{Tr}(A), A \in G \}$.
 On a donc $\text{Im } f \subset X^m$. Il suffit de montrer que X est fini.
 Or, les v.p. des éléments de G appartiennent à l'ensemble des racines N ième de l'unité.
 Donc X est fini $\square$

Annexe:

- Que se passe-t-il dans $GL_n(\mathbb{F}_p)$?
 Pb par le lemme: pb pour résoudre $(n_1, \dots, n_r) = (0, \dots, 0) \in \mathbb{N}^r$.
 car la caractéristique est p .
 $\rightsquigarrow$ vraie qu'en caractéristique nulle.
- Exemple d'un groupe infini d'exposant fini: $(\mathbb{F}_2[X], +)$ infini d'exposant 2.
- Proposition:
 Soit $G < GL_n(\mathbb{C})$, $p = \dim(\text{Vect}(G))$
 Alors, $\exists (\pi_i)_{i=1}^p$ une base de $\text{Vect}(G)$ telle que $\forall i \in [1, p], \pi_i \in G$.
- Démonstration:
 Soit $e_1, \dots, e_p \in \text{Vect}(G)^p$ base de $\text{Vect}(G)$.
 $e_1 = \sum_{k=1}^m \lambda_{1,k} \pi_{1,k}; \dots; e_p = \sum_{k=1}^m \lambda_{p,k} \pi_{p,k}$ avec $\lambda_{i,j} \in \mathbb{C}$ et $\pi_{i,j} \in G$,
 par def de $\text{Vect}(G)$.
 Ainsi, puisque $(e_i)_{i=1}^p$ est une base de $\text{Vect}(G)$, $(\pi_{i,j})_{\substack{i \in [1, p] \\ j \in [1, \max(m_i)]}}$ forme une
 famille génératrice de $\text{Vect}(G)$.
 On peut alors, extraire une base $(\pi_i)_{i=1}^p \in G^p$ de $\text{Vect}(G)$.
- Déterminant de Vandermonde: $V(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i)$
- Démonstration:
 Par récurrence:
 (I) $n=2$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \lambda_2 - \lambda_1$ Ok.
 (H) Soit $n \geq 3$.
 Supposons le résultat vraie au rang $n-1$.
 Montrons au rang n .

$$V(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_n \\ \vdots & & \vdots \end{vmatrix}$$

$$V(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_n \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Le déterminant est une forme n -linéaire alternée, on a que pour tout polynôme unitaire $P \in K^{n-1}[X]$

$$V(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_n \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-2} & \dots & \lambda_n^{n-2} \\ P(\lambda_1^{n-1}) & \dots & P(\lambda_n^{n-1}) \end{vmatrix}$$

En particulier, pour $P(x) = \prod_{k=1}^{n-1} (x - \lambda_k)$, on a:

$$= \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_{n-1} & \lambda_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{n-2} & \dots & \lambda_{n-1}^{n-2} & \lambda_n^{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & P(\lambda_n) \end{vmatrix} = V(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) P(\lambda_n)$$

$$= \prod_{k=1}^{n-1} (\lambda_n - \lambda_k) \times \prod_{1 \leq i < j \leq n-1} (\lambda_j - \lambda_i)$$

$$= \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i).$$

$$\boxed{\text{ou}} \quad V(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \lambda_2 - \lambda_1 & \dots & \lambda_n - \lambda_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \lambda_2^{n-2}(\lambda_2 - \lambda_1) & \dots & \lambda_n^{n-2}(\lambda_n - \lambda_1) \end{vmatrix} = \prod_{k=2}^n (\lambda_k - \lambda_1) \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_2^{n-2} & \dots & \lambda_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

CCL On a le résultat souhaité.

→ Formule de Cramer:

Les déterminants permettent de résoudre les systèmes linéaires. On suppose donné le système de n équations à n inconnues suivant :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,n}x_n = b_n \end{cases}$$

Ce système admet une unique solution si, et seulement si, le déterminant D du système est non nul, où D est donné par :

$$D = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & & \ddots & \\ \vdots & & & \\ & & & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

On dit alors que le système est un **système de Cramer**. On peut déterminer la valeur des inconnues x_i d'un système de Cramer par les formules suivantes, appelées **formules de Cramer** :

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,i-1} & b_{n-1} & a_{n-1,i+1} & \dots & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}}{|D|}$$

Démonstration :

$$DX = A \Leftrightarrow A = x_1 C_1 + \dots + x_n C_n$$

Par linéarité du déterminant suivant la k -ième colonne on en déduit :

$$\det \left(\underbrace{[C_1 \dots C_{k-1} \mid C_{k+1} \dots C_n]}_{D_k} \right) = \sum_{i=1}^n x_i \det \left([C_1 \dots \overset{k}{\downarrow} C_i \mid C_{k+1} \dots C_n] \right) \\ = x_k \det(D) \quad \text{Idem} \Rightarrow x_k = \frac{\det(D_k)}{\det(D)} \quad \square$$

→ Formule de Burnside : $|G \backslash X| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{Fix}_X(g)|$

Démonstration :

$$|\{ (g, x) \in G \times X \mid g \cdot x = x \}| = \sum_{g \in G} |\text{Fix}(g)| \\ = \sum_{x \in X} |\text{Stab}(x)|$$

Donc, $\sum_{g \in G} |\text{Fix}(g)| = \sum_{x \in X} |\text{Stab}(x)|$

$$\stackrel{\text{formule des classes}}{=} \sum_{x \in X} \frac{|G|}{|\text{Orb}(x)|} = |G| \sum_{x \in X} \frac{1}{|\text{Orb}(x)|} = |G| \sum_{u \in G \backslash X} \underbrace{\left(\sum_{x \in u} \frac{1}{|u|} \right)}_{=1} \\ = |G| |G \backslash X|$$

→ Thm :

$$\boxed{GL_n(\mathbb{K})} \quad \mathbb{K} \text{ corps.} \quad G < GL_n(\mathbb{K}) \quad \begin{matrix} \text{(i)} \\ G \text{ d'exposant fini} \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \text{(ii)} \\ G \text{ fini} \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \text{(iii)} \\ \text{é.l. de } G \text{ diag. et } \text{Tr } G \text{ fini.} \end{matrix}$$

* Si $\mathbb{K}$ n'est pas algébriquement clos.

Si $G < GL_n(\mathbb{K}) \Rightarrow G < GL_n(\mathbb{L})$ où $\mathbb{L}$ = clôture algébrique de $\mathbb{K}$.

* Si $\mathbb{K}$ n'est pas algébriquement clos. et $\mathbb{K}$ est fini. (iii)

Si $G \leq GL_n(\mathbb{K}) \Rightarrow G \leq GL_n(\mathbb{L})$ où $\mathbb{L}$ = clôture algébrique de $\mathbb{K}$.

Donc, si G est d'exposant fini par le thm appliqué, G est fini.

* Si car $\mathbb{K} = \mathbb{F}_p \neq 0$

On a $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{K} \right\} \leq GL_2(\mathbb{K})$. $\forall x \in \mathbb{K}, \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^p = \begin{pmatrix} 1 & px \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Id$

Donc G d'exposant fini.

Mais, G infinie si $\mathbb{K}$ infinie. (par ex: $\mathbb{K} = \mathbb{F}_p(x)$)

* Si on remplace (ii) par : "Tout élément de G est d'ordre fini"

On a $G := \left\{ \begin{pmatrix} \mu & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \mid \mu \in \mathbb{C}^* \right\} \leq GL_n(\mathbb{C})$ n'est pas fini
 $\mathbb{C}$ de module 1

* Soient $\mathbb{K}$ et $\mathbb{L}$ deux corps finis. Pour quel cas $GL_n(\mathbb{K}) \cong GL_m(\mathbb{L})$?

C'est le cas si $|\mathbb{K}| = |\mathbb{L}|$ (i.e. $\mathbb{K} \cong \mathbb{L}$)
et $m = n$

